

Plan de leçon¹: Polyèdres

Membres de l'équipe

Benjamin Arnold, Pierre Fumeaux, Marie-Noëlle Kaempf, Olivier Lorenzi, Jérôme Loutan (CAS InnoMaths 21-23), Stéphane Clivaz (HEP Vaud)

Date de la leçon

9 décembre 2022

Enseignant·e·s

Marie-Noëlle Kaempf

Classe

10 OSMEP

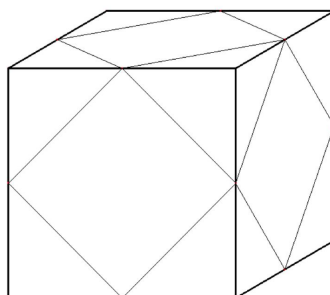
1. Titre de la leçon

Puzzle 3D

2. Énoncé (voir aussi annexe)

Simon vient d'utiliser sa nouvelle tronçonneuse sur un cube de bois. Son outil ne lui permet de réaliser que des coupes parfaitement planes et dont l'épaisseur est négligeable. Il a effectué des coupes successives sans bouger les morceaux du cube de façon à obtenir le maximum de morceaux possible. Les marques laissées par la scie sont représentées en traits fins. Les 6 faces du cube ont le même aspect.

Voici le fruit de son travail:



Défi:

Construire les pièces de ce puzzle à l'aide de polygones en bois (et de scotch). Dresser la liste des pièces nécessaires. Ensuite, reconstituer le cube.

¹ Adaptation du plan de leçon élaboré par le Lesson Study Group du Mills College, Oakland, CA (USA): <https://lessonresearch.net/plan-step/take-stock/>

3. Thème de recherche

Objectifs à long terme pour les élèves et moyens de les atteindre

Percevoir en 3D divers polyèdres constituant un ensemble cubique, préalablement dessiné sur plan. Visualisation dans l'espace facilitée par l'apport de pièces en bois concrètes et représentant les faces desdits polyèdres (phase d'essais et d'erreurs).

Faire le lien entre l'un des développements possibles du solide associé (par exemple, pyramides) et sa représentation spatiale. Possibilité de réaliser le croquis sur plan afin de commander les pièces essentielles en jeu voire de permettre l'utilisation de polydrons pour les élèves les plus en difficulté.

Utiliser les diverses symétries d'un solide (cube). Être capable de visualiser les coupes transversales afin de favoriser la compréhension de la structure interne du cube découpé.

Visualiser la juxtaposition des solides identifiés dans le but de reconstruire intégralement le cube initial. Aide possible à l'aide d'une structure en plexiglas représentant un demi-cuboctaèdre.

4. Contexte et recherches sur le contenu

Pourquoi nous avons choisi de traiter ce sujet, en quoi il est délicat pour les élèves et/ou pour les enseignants

Les ressources que nous avons étudiées et ce que nous avons appris à propos du contenu et les manières de penser des élèves

La vision en 3D est difficile pour certains élèves. C'est une compétence peu entraînée dans les manuels et peu d'activités de manipulation y sont proposées. On part du principe que les élèves sont capables de visualiser mentalement le résultat final d'un développement et vice et versa, ce qui n'est pas aisément le cas pour une majorité d'élèves.

Nous voulons tester le matériel que nous avons conçu à la fois pour cette leçon et pouvant aussi être utilisé pour d'autres sujets (lignes et surfaces, représentations de solides et solides, pavages, isométries, ...), ceci dans le but de favoriser cet apprentissage de manière plus ludique et plus intéressante.

Point à observer : passage de l'idée du découpage sur plan à l'utilisation du matériel proposé. Qu'observe-t-on chez les élèves ? Quels sont les obstacles rencontrés et quelle(s) aide(s) semblent se dessiner grâce à l'apport de notre matériel ?

L'élève arrivera-t-il à s'approprier le matériel pour visualiser certains plans de coupe ? Devrons-nous avoir recours à d'autres supports, tel qu'un cube composé d'arêtes en bois (ou métalliques), fixés par des connecteurs et de la laine pour lui permettre de visualiser les polyèdres formant le cube qui ne sont pas visibles de l'extérieur ?

Notre matériel permettra-t-il réellement à dépasser certaines difficultés de visualisation ?

Tout ce matériel qui doit être géré par l'enseignant n'est-il pas trop contraignant ? Ne devrait-on pas imaginer un meilleur processus de distribution du matériel afin de favoriser l'analyse des productions ?

La plus-value sera-t-elle à la hauteur de nos attentes, sachant que ce matériel demande un temps conséquent de préparation ?

5. Liens avec le plan d'études (PER)

MSN 31 — Poser et résoudre des problèmes pour modéliser le plan et l'espace...

- Reconnaissance, dénomination, description de solides selon leurs propriétés (faces, sommets, arêtes, polyèdre ou non) : cube, parallélépipède rectangle, prisme droit, cylindre, pyramide
- Réalisation de développements et construction de solides : cube, parallélépipède rectangle, prisme droit
- Représentation de solides en perspective

Connaissances préalables	Éléments du plan d'études relatifs à cette séquence et plus particulièrement à la leçon de recherche	Connaissances futures
<p>Savoir identifier les surfaces d'un polyèdre.</p> <p>Savoir réaliser au moins un développement pertinent d'un polyèdre correctement identifié.</p> <p>Être capable de se représenter un polyèdre par découpage en polyèdres élémentaires.</p> <p>Réaliser le développement de divers solides.</p> <p>Utilisation du théorème de Pythagore</p>	<p>Reconnaissance, dénomination, description de figures planes selon leurs propriétés et construction de triangles et de quadrilatères.</p> <p>Réalisation de développements et construction de solides.</p> <p>Mesure des dimensions adéquates et calcul de grandeurs recherchées</p> <p>Vision dans l'espace</p> <p>Option spécifique Mathématiques et Physique (OS MeP)</p> <p>Intersection d'un solide et d'un plan</p>	<p>Mesure des dimensions adéquates et calcul du volume d'un solide (en le décomposant au besoin en solides simples).</p> <p>Représentation de solides en perspective (dans un second temps).</p> <p>OS MeP</p> <p>Réalisation de développement et construction de polyèdres réguliers ou semi-réguliers.</p> <p>Description de polyèdres selon leurs propriétés (faces, sommets, arêtes, caractéristique d'Euler, dual)</p> <p>Détermination du volume, de la surface ou d'une grandeur manquante d'un polyèdre en utilisant la formule de Pythagore ou le calcul algébrique.</p>

6. Plan de la séquence

Leçon	Objectifs d'apprentissage et tâches
1 Leçon de recherche (2 périodes) (1e partie)	Objectif: découverte des divers polyèdres composant le cube tronçonné Tâche : utiliser le modèle proposé sur la fiche de données en le découpant sur la représentation en perspective.
(2e partie)	Objectif: création d'un développement possible de chaque polyèdre différent identifié Tâche(s): par essais successifs sur papier, dessiner le croquis d'un développement possible des divers polyèdres composant le cube tronçonné. Commande des polygones auprès de l'enseignant·e (après validation commune du groupe) formant l'un des développements possibles pour réaliser chaque polyèdre différent composant le cube tronçonné
(3e partie)	Objectif: création de chaque polyèdre composant le cube tronçonné à l'aide du matériel fourni par l'enseignant·e Tâche(s): rassembler toutes les pièces nécessaires à la construction de chaque polyèdre puis les construire le plus précisément possible.
2	Calcul des mesures des polygones composant chaque pièce, éventuellement en valeur exacte
3	Calcul de la masse de la maquette en donnant comme indication la masse au mètre carré du bois utilisé pour fabriquer les pièces.

7. Objectif de la leçon de recherche

Réaliser toutes les pièces d'un puzzle en 3D afin de recréer le cube initial découpé selon des directives précisées par le dessin (phase de représentation et de déduction, puis validation par la construction physique des objets concernés).

8. Plan de la leçon de recherche

Temps	Tâches et activités, points clés pour l'apprentissage, possibles réponses des élèves	Support et relances de l'enseignant-e	Éléments à observer ou observés
5'	<p>Accueil</p> <ul style="list-style-type: none"> - Présentation des observateurs et de la raison de leur présence - Constituer des groupes de 2 élèves : au choix des élèves. 		
	<p>Consigne</p> <ul style="list-style-type: none"> - Énoncé sur photocopies - Papier brouillon - Faire lire la consigne à un élève - Répondre aux questions (sans trop gesticuler) - Essayer de résoudre le problème sur les feuilles de brouillon. Avant de recevoir du matériel, passer commande des pièces nécessaires à la réalisation des polyèdres visualisés. 		<p>Quel passage d'une modélisation en perspective aux propriétés des polygones réguliers ?</p>
10' à 25'	<p>Travail par groupes, sans matériel</p> <ul style="list-style-type: none"> - 5' en individuel - Répondre aux questions - Prévoir suffisamment de temps pour 	<ul style="list-style-type: none"> - Que signifie "une coupe plane" ? Et "couper d'un coup" ? - Pourquoi ne pas bouger ? Attention, après la première coupe, les coupes 	<p>Est-ce que les élèves dessinent sur le cube de l'énoncé ? Ou éventuellement sur un autre cube ?</p> <p>Dessinent-ils sur des pièces indépendantes</p>

	<p>les diverses expérimentations des groupes.</p> <p>Travail par groupes</p> <ul style="list-style-type: none"> - Visualisation dans l'espace des coupes - Travail sur feuille de donnée 	<p>suivantes génèrent plusieurs morceaux en une fois.</p> <p>Éventuellement prendre l'exemple de la pomme coupée en deux et encore en deux (utiliser une vraie pomme).</p> <p>On peut aussi utiliser des parallélépipèdes rectangles (ex. boîtes de thé) pour sensibiliser les élèves à la problématiques des deux faces coexistantes lorsqu'on coupe un solide.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Prévoir des dessins (structure de cubes, dessin données, papier quadrillé 1cm, papier blanc) à disposition. 	<p>du cube ?</p> <p>Quel type de papier est utilisé (quadrillé, feuilles blanches) ?</p> <p>Le dessin semble représenter quelquefois un obstacle important car il n'est pas évident de visualiser les polyèdres en présence.</p> <p>L'enseignant·e doit être attentif·ve à ce fait car certains groupes pourraient perdre un temps considérable et ne pas réussir à débloquent la situation, les laissant ainsi copier une tentative fructueuse (ou non) d'un groupe plus avancé.</p> <p>L'apport de la boîte en plexiglas peut singulièrement aider et éviter les essais infructueux.</p>
	<p>Montrer le matériel</p> <ul style="list-style-type: none"> - Cube en plexiglas 		
35' à 50'	<p>Travail par groupes</p> <ul style="list-style-type: none"> - Prises de mesures - Visualisation dans l'espace des coupes - Prise de commande des pièces - Construction de polyèdres - Eventuel démontage du cuboctaèdre (ou autre polyèdre) en pièces de base - Construction de polyèdres 	<p>Relance éventuelle dans les groupes : le but de Simon était de faire le maximum de pièces. Est-ce qu'on pourrait obtenir plus de pièces en coupant ce cuboctaèdre ?</p> <p>Utilisation du cuboctaèdre en plexi pour débloquent la situation. Les demi-cuboctaèdres en plexi (ou en bois ou</p>	<p>Dans un premier temps, les élèves vont probablement enlever les 8 tétraèdres situés au sommet et arriver au cuboctaèdre central, sans continuer à découper ce dernier.</p> <p>Le travail de découpage de ce cuboctaèdre central constitue le cœur du problème.</p>

	élémentaires (tétraèdres, pyramides à base carrées)	en 3D, etc.) permettent de bien visualiser les coupes provenant des plans passant par le centre du cube.	
20'	<p>Mise en commun</p> <ul style="list-style-type: none"> - Analyse des différentes stratégies, des différents résultats <ul style="list-style-type: none"> o dessin o construction - Comment avez-vous prévu les pièces à commander ? 		<p>Certains élèves pourraient avoir calculé la longueur des arêtes en jeu, à l'aide du théorème de Pythagore. C'est une partie à surveiller car elle peut engendrer des erreurs manifestes et faire perdre un temps relativement important avant de passer à la phase de commande des pièces en jeu. Toutefois, si la méthode calculatoire est appliquée correctement, elle permettra de construire correctement les tétraèdres.</p>
5'	Rangement		

9. Réflexions à l'issue du cycle

Ce que nous avons appris

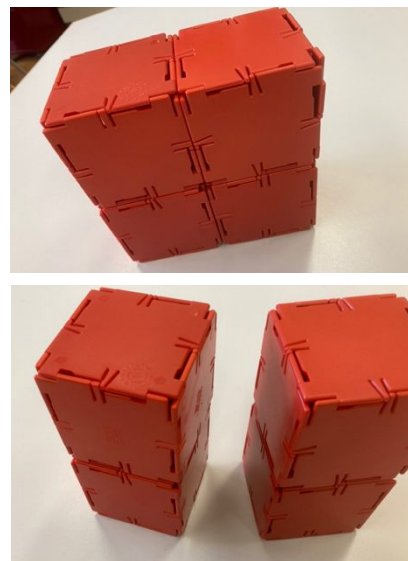
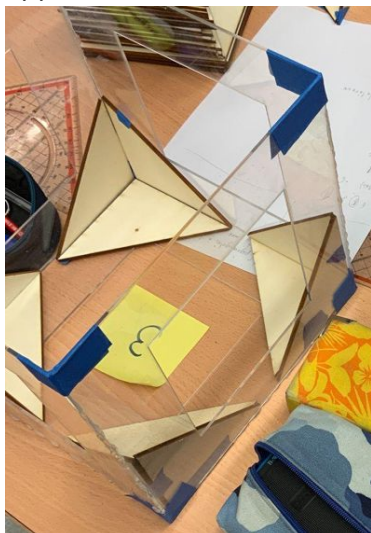
Le temps était insuffisant pour réaliser toute l'activité car elle nécessite passablement d'expérimentations (phases d'essais et d'erreurs) avant d'être réalisée sans trop de difficultés. Il nous semble donc nécessaire de prévoir une période supplémentaire pour réaliser cette activité. Ce temps supplémentaire permettrait aussi de réaliser une vraie mise en commun (voir ci-dessous). Il nous semble ainsi que cette activité devrait être planifiée sur trois ou quatre périodes pour permettre à tous les groupes de réaliser la tâche et d'effectuer au moins un prolongement. Il serait donc nécessaire de pouvoir stocker les productions les deux moments de réalisation.

Il est difficile de gérer chaque groupe en parallèle, notamment lorsqu'on demande à chaque groupe de procéder par des "commandes" précises. Une certaine perte de temps est inévitable dans cette configuration. Nous souhaitons toutefois garder cette idée, car elle contraint les élèves à prévoir quels seront les polyèdres résultant du découpage et à prévoir les pièces qui constituent ces polyèdres.

Nous avons remarqué l'influence du premier groupe en action sur les autres groupes. Ceci est d'autant plus fort qu'on manipule des objets et qu'ils sont relativement grands. Ceci conduit à une certaine uniformité des procédures.

Nous avons également constaté une utilisation souvent inadéquate du vocabulaire, en particulier l'utilisation des noms de polygones pour désigner des polyèdres : "triangle en pyramide", "carré" (pour "cube")... Il serait intéressant de reprendre cela avec les élèves et peut-être de mettre en regard les deux séries de termes.

Pour plusieurs groupes, il a été difficile de "fermer" les différents polyèdres (voir photo), car ils imaginaient que le polyèdre suivant viendrait "fermer". Une suggestion serait d'illustrer les découpes à l'aide de polydrons qui illustrent que, pour une coupe donnée, il apparaît deux faces.



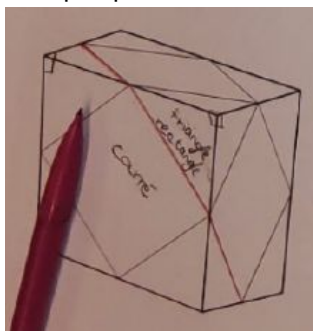
Il nous a été difficile de vérifier que chaque groupe a bien compris ce qui est demandé. Prendre du temps pour bien expliquer ce qui est attendu semble être utile.

Il est nécessaire d'avoir un lieu pour stocker le matériel afin de permettre de terminer l'activité une autre fois voire de le conserver pour réaliser des activités dites d'approfondissement.

Le matériel doit bien être vérifié. Certains scotchs étaient trop vieux et trop fins, certains groupes ont perdu du temps par rapport à leurs camarades à cause de ça. Le scotch "bleu" semble parfait.

L'effet de cette leçon est positif. Durant la leçon, certains groupes d'élèves peu habitués à réussir ont obtenu des résultats, parfois très rapidement et étaient eux-mêmes étonnés de cela. De plus, à moyen terme, le test ultérieur sur les polyèdres a donné des résultats meilleurs que les années précédentes. Le temps investi semble donc rentable.

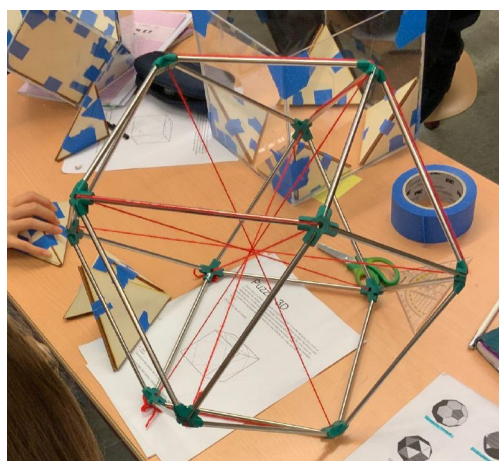
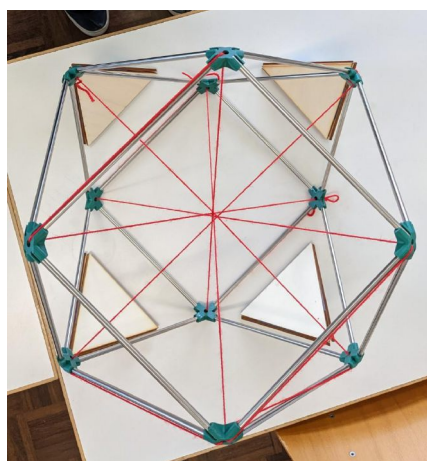
Les plaquettes de bois permettent des ajustements d'essais, ce qui est moins le cas des développements construits par les élèves sur du papier.



Nous avons observé que peu d'élèves (un seul groupe observé) arrivent à visualiser le plan de coupe hexagonale (voir photo).

Beaucoup d'élèves se contentent des coupes triangulaires dans chaque coin. Cela donne donc un cuboctaèdre et huit tétraèdres.

Nous avons préparé deux demi-cuboctaèdres en plexiglas. Il aurait pu être utile d'arrêter les élèves à ce stade et de leur montrer cette coupe à l'aide de ce matériel. Cela peut également être fait avec des ficelles sur un squelette de cube type "construmaths" ou autre bricolage (voir photo).

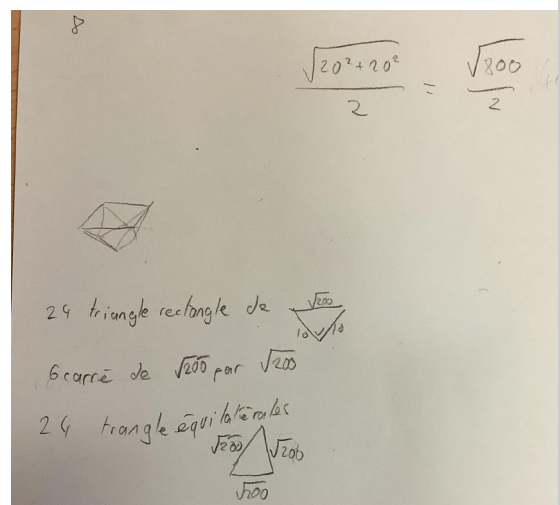


Cette étape permet aux élèves de mieux visualiser les différents polyèdres qui composent le cuboctaèdre car le processus d'abstraction est compliqué à ce niveau de la tâche. Nous avons eu l'impression que certains groupes ont pu construire le résultat final sans même avoir vraiment visualisé pourquoi le cube était découpé de la sorte. Il nous semble donc utile d'avoir un cuboctaèdre à garder pour permettre aux groupes de couper leur cuboctaèdre mais de continuer à "le voir".

La mise en commun peut également être le moment de faire émerger ces informations. En effet, chaque groupe avance à son rythme et il peut être compliqué de trouver le bon moment pour donner un tel apport. Pour les élèves ayant le plus de difficulté, seule la manipulation du puzzle complet permet de vraiment visualiser les plans de coupe.

La mise en commun prévue n'a pas pu vraiment avoir lieu, faute de temps. Il nous semble nécessaire de garder du temps pour :

- comparer les productions, en particulier pour voir si elles respectent bien la consigne des découpes,
- permettre l'expression de constat surprenant, par exemple le fait qu'une ligne qui semble gauche sur le dessin est coplanaire,
- mettre en dialogue les cheminements, via le calcul par exemple (voir photo).
- permettre aux groupes qui n'ont pas un découpage complet de visualiser un tel découpage.



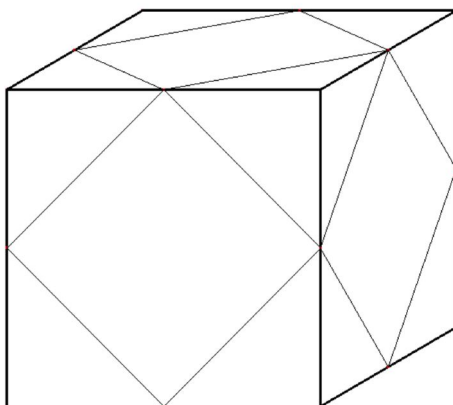
L'instauration d'une certaine routine face à une tâche "innovante" et ouverte induit chez l'élève une plus grande efficacité dans la tentative de résoudre la tâche. En effet, cette routine diminue sa crainte de l'échec puis développe progressivement sa confiance dans son travail, lui faisant prendre conscience que ses erreurs permettront de développer ses connaissances lors de la mise en commun. Cette activité de manipulation est donc un moyen d'intégrer cette pratique dans un enseignement innovant.

10. Annexes

10.1 Puzzle 3D

Simon vient d'utiliser sa nouvelle tronçonneuse sur un cube de bois. Son outil ne lui permet de réaliser que des coupes parfaitement planes et dont l'épaisseur est négligeable. Il a effectué des coupes successives sans bouger les morceaux du cube de façon à obtenir le maximum de morceaux possible. Les marques laissées par la scie sont représentées en traits fins. Les 6 faces du cube ont le même aspect.

Voici le fruit de son travail :



Défi :

Construire les pièces de ce puzzle à l'aide de polygones en bois (et de scotch). Dresser la liste des pièces nécessaires. Ensuite, reconstituer le cube.

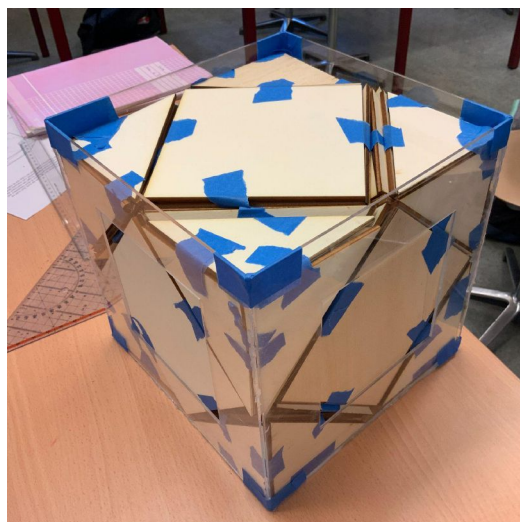
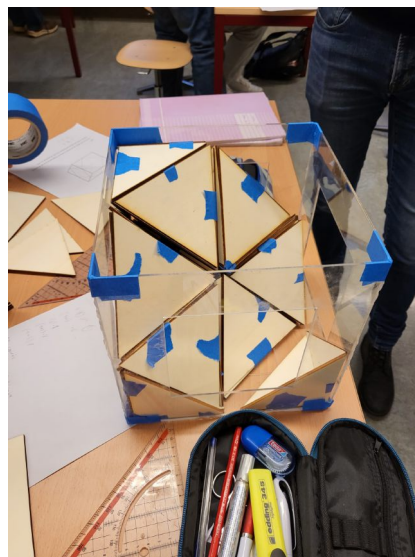
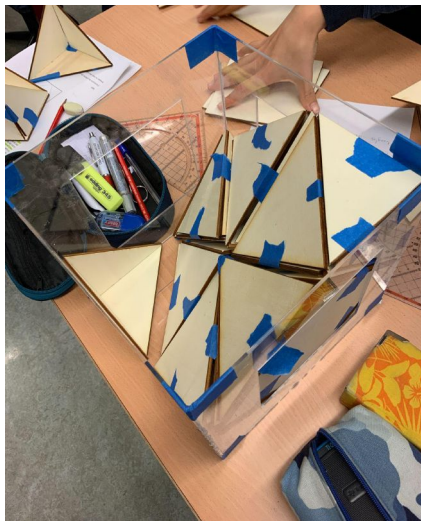
Prolongements, suite de la séquence

Combien de coupes (au minimum), Simon a-t-il effectuées ?

Réalisation de développements

Surface de bois utilisée, masse de la maquette

10.2 Solution : quelques photos



10.3 Fichiers découpeuse laser

Les fichiers permettant le découpage des formes à la découpeuse laser sont disponibles sur le site du FabLearn de la HEP Vaud : <https://fablearn.hepl.ch/ressources/>